La geometria

I Babilonesi conoscevano metodi per il calcolo delle aree di alcune figure piane:

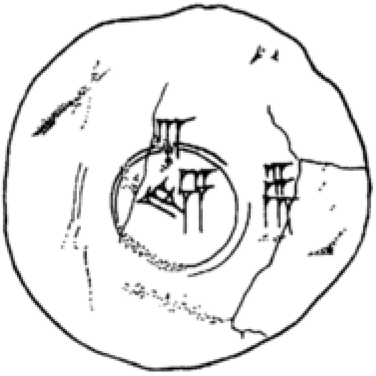
- il triangolo, il rettangolo, il quadrato, la corona quadrata, il trapezio, la circonferenza (con valori approssimati di π), i poligoni regolari con cinque, sei o sette lati (formule approssimate)

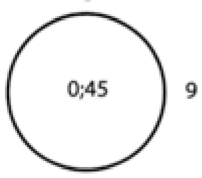
e dei volumi di alcuni solidi:

- il prisma, il cilindro, il cono, il tronco di piramide, il tronco di cono (con formule talvolta solo approssimate)

A proposito delle figure

Il cerchio





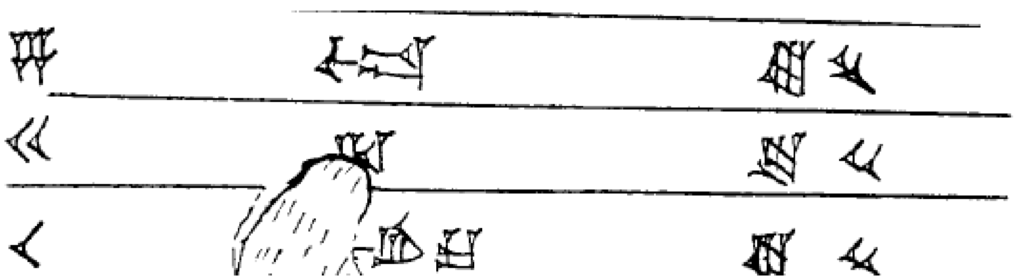
$$A = \pi r^2 = \frac{(2\pi r)^2}{4\pi}$$

La tavoletta YBC 7302 riproduce un esercizio svolto da un allievo, che determina l'area di una circonferenza di perimetro 3, elevando questo al quadrato, e quindi moltiplicando per il reciproco di 12 (assumendo dunque 3 come valore del nostro π).

Il calcolo è basato sulla conoscenza di 12 come ***coefficiente*** (IGI.GUB) del cerchio (GUR/GAM, *kippatum*[1]) ossia come numero per il quale moltiplicare il quadrato del "lato" al fine di ottenere la misura dell'area. Per "lato" i Babilonesi intendevano, in generale, la (lunghezza della) linea che delimita la figura. Nel caso del cerchio, si tratta del perimetro. Il cerchio è dunque concepito come la regione racchiusa da tale linea, ossia da questa descritta dall'esterno. Non è pensato come il risultato della rotazione di un segmento intorno ad uno dei suoi estremi. Il concetto è dunque di natura diversa rispetto alla modalità costruttiva, certamente basata sull'uso del compasso, come testimoniano le tracce presenti su alcune tavolette d'argilla.

I coefficienti delle figure (come altre costanti caratteristiche utili in geometria e in metrologia) erano riportati in appositi elenchi. Uno di questi è presente nella tavoletta TMS II, le cui prime righe sono le seguenti:

BM 15285

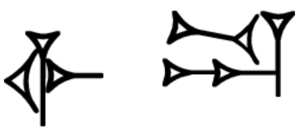


5	IGI.GUB	*šà kippatim* (GAM)
20	RI	*šà kippatim* (GAM)
10	[*pi*]-*ir-ku*	*šà kippatim* (GAM)

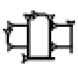
La traduzione è

0;5	costante del cerchio
0;20	diametro del cerchio
0;10	raggio del cerchio

Il logogramma



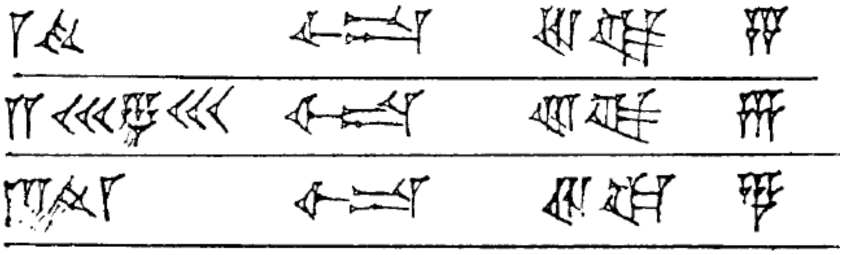
[11] La radice etimologica è la stessa della parola ebraica כיפה (*kippah*), e dei termini che, nella stessa lingua, indicano l'azione di *piegare* (anche in senso figurato), ed oggetti concavi come il palmo della mano e il cucchiaio. Forse il termine è anche imparentato con la parola latina *cupa*, da cui la nostra *cupola*. Il logogramma sumero GAM (probabilmente derivato dalla figura di una canna spezzata) esprime l'idea di curvatura (è usato anche per indicare l'atto di inchinarsi). Un logogramma alternativo è KEŠDA, il cui significato primario è *nodo*:



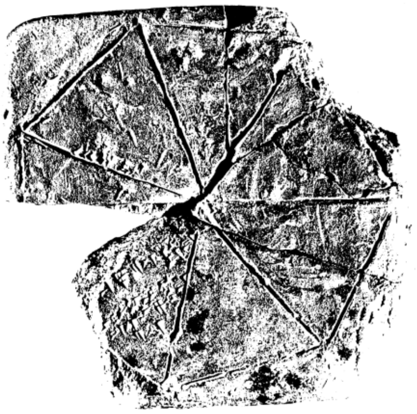
si compone di *occhio* e *funzione* e significa letteralmente *vedere*[2].
Il logogramma

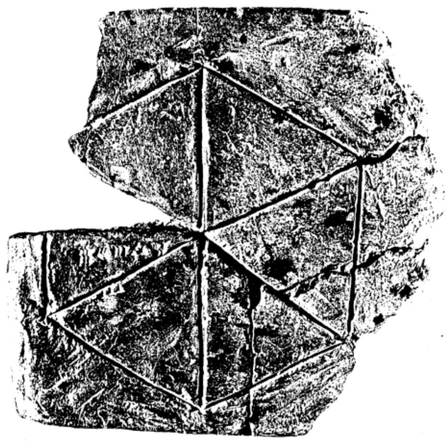
qui viene letto RI e significa (*essere*) *distante* (la parola accadica corrispondente è *nesû*). Lo stesso logogramma può anche essere letto DAL (*linea trasversale*, in accadico: *tallum*). Il termine accademico *pirku* o (*perku*) corrisponde al nostro *raggio*. Va osservato che questo è l'unico testo pervenutoci in cui compare il termine. È sottinteso in altri documenti, dove, in problemi riguardanti semicerchi, svolge la funzione di segmento perpendicolare al diametro. È un oggetto puramente metrico.

La stessa fonte citata sopra contiene le seguenti tre righe, che contengono i coefficienti (approssimati) per il pentagono, l'esagono, l'ettagono (per i quali la linea definente è il lato):

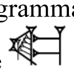
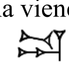


1 40	IGI.GUB	*šà*	SAG 5
2 37 30	IGI.GUB	*šà*	SAG 6
3 41	IGI.GUB	*šà*	SAG 7





Fronte e retro della tavoletta TMS II (non ci è pervenuta alcuna immagine di pentagono).

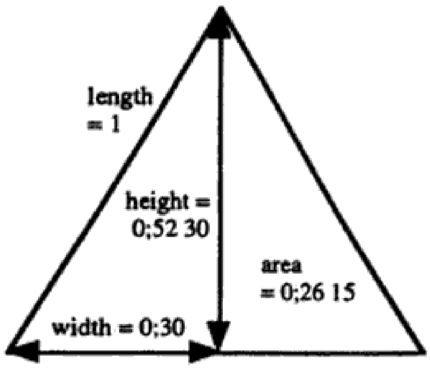
[2] Il secondo logogramma viene utilizzato in altre combinazioni, come, ad esempio, in   (*correre* = *piede* + *funzione*), oppure   (*mangiare* = *dente* o *bocca* + *funzione*).

Il triangolo

Indicato dal logogramma SAG.DÚ

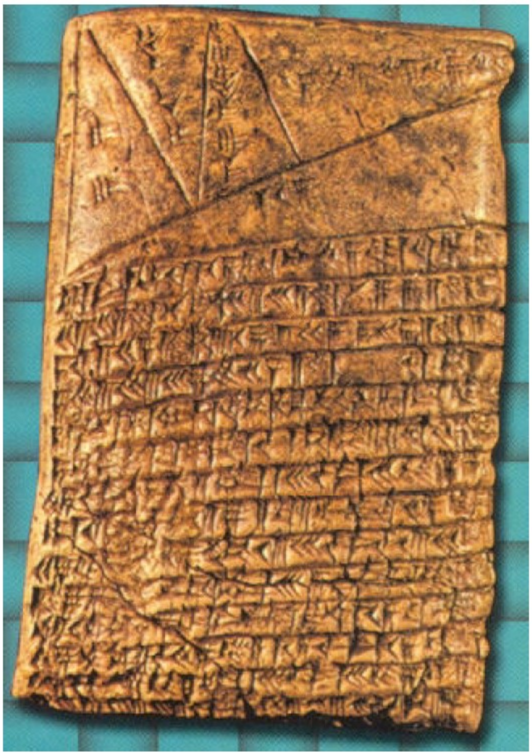
è individuato dalle misure di *larghezza* e *lunghezza*, intese come le nostre *base* ed *altezza*. A queste si applicano i coefficienti 0;30 ed 1 per ottenere (come prodotto) l’area. Il riferimento è il triangolo rettangolo (considerato come la metà di un rettangolo), ed è ad esso che si riconduce il calcolo per gli altri tipi di triangoli, in maniera esatta oppure approssimata. Esempio tipico è il caso del triangolo equilatero (di lato unitario), la cui altezza è determinata (in maniera approssimata) mediante il teorema di Pitagora sottraendo dal lato la sua ottava parte. Questo è il significato dei seguenti frammenti di tavole di coefficienti:

A 1	30 *ù* 1 IGI.GUB SAG.DÙ	0;30 and 1, the coefficients of a triangle.
H 5	30 *ša sa*?-*ta*?-⌈*ki*?⌉	0;30, of a triangle?.
F 19	30 *ša* SAG.DÙ	0;30, of a triangle.
C 7	SAG.DÙ-*kum ša sa-am-na-*[*tu na*]-*ás-ḫa* 26 15 *i-*[*gi-gu-bu-šu*]	A triangle from which an eighth part is taken: 0;26 15 [is its coefficient].
J 2	26 15 GÁN UR.RU.UḪ SAG.3 KI.MIN IGI.GUB-*ú*	0;26 15, the area of a triangular storehouse, ditto [i.e. storage], the coefficient.
C 8	*ta-al-li* SAG.DÙ-*ki* 52 30 *i-*[*gi-gu-bu-šu*]	The long transversal of a triangle: 0;52 30 [is its coefficient].

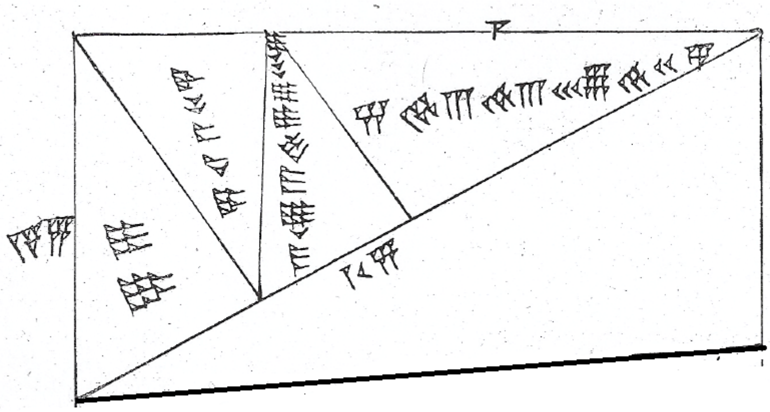


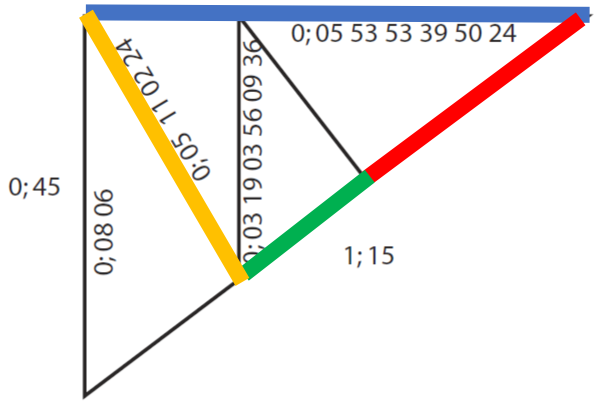
$$h = \sqrt{1-\frac{1}{4}} \approx 1-\frac{1}{8} = 0;52,30$$
$$A = 0;52,30 \times 0;30 = 0;26,15$$

Si noti come i numeri 0;26,15 e 0;52,30 assumano un duplice ruolo: da un lato sono i valori di grandezze geometriche (area di un magazzino triangolare, misura dell’altezza del triangolo), dall’altro sono costanti indicanti rapporti (quello tra l’area di un triangolo rettangolo e il suo lato, quello tra l’altezza di quest’ultimo e il suo lato). La coincidenza qui è data dal fatto che il lato è assunto come unitario: è questo il modello di riferimento per tutti i triangoli equilateri. È ben presente il senso della *proporzionalità* che caratterizza quelle che noi chiamiamo *figure simili.* Quest’ultima nozione, tuttavia, non appare mai esplicitamente descritta nei testi matematici a noi pervenuti.



IM 55357





Il problema presentato in questa tavoletta ha il testo seguente:

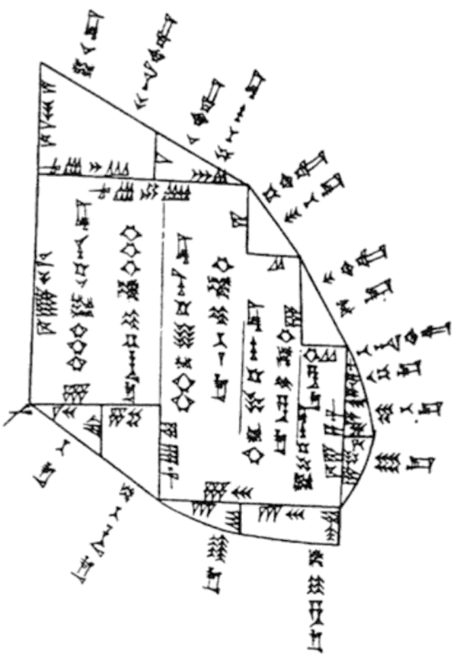
Un triangolo. La lunghezza è 1, il lato lungo (=l'ipotenusa) *è 1;15; la* ***larghezza superiore*** *0;45, l'area completa 0;22,30. All'interno di 0;22,30, l'area completa, l'****area superiore*** *è 0;08,06, l'area seguente è 0;05,11,02,24, la terza area 0;03,19,03,56,09,36, l'area inferiore 0;05,53,5339,50,24. Quali sono la* ***lunghezza superiore****, la* ***larghezza media****, la* ***lunghezza inferiore*** *e la* ***verticale****?*

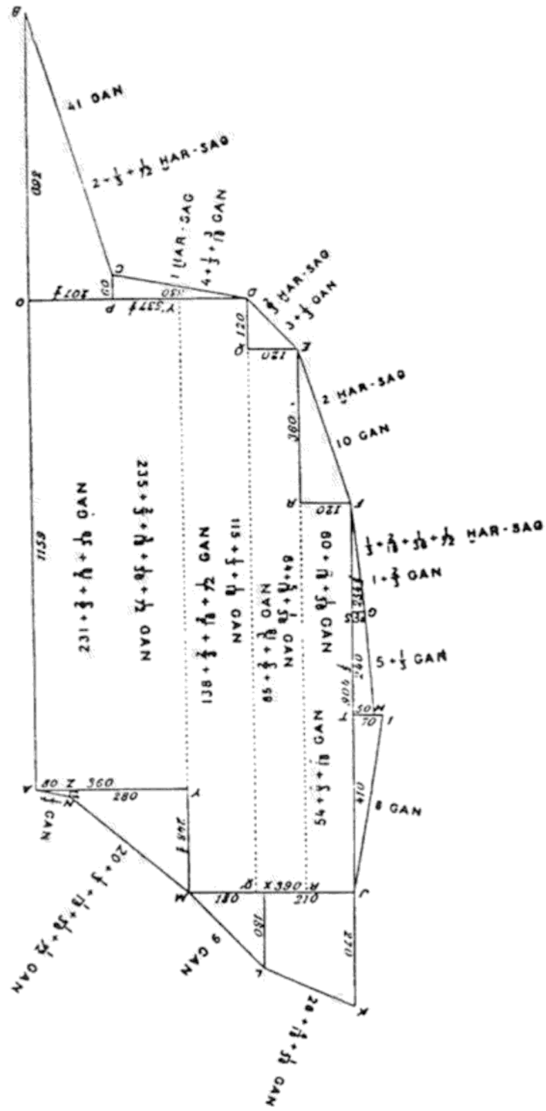
Questo documento è stato spesso citato a supporto della tesi che i Babilonesi possedessero la nozione di triangoli simili. La questione è controversa. In ogni caso, non potrebbero averne avuto altra idea che quella intuitiva esprimibile come *identità di forma*. Pare accertato, infatti, che non concepissero l'angolo come grandezza. Non esiste un termine per *angolo*, e quello che noi chiamiamo *angolo retto* era semplicemente la manifestazione di una *perpendicolarità* primitivamente intesa come posizione della direzione verticale rispetto a quella orizzontale, e a cui era riferito un termine specifico, *mutarrittum*, il cui significato era "direzione del filo a piombo". Ciò non esclude, tuttavia, che essi conoscessero le relazioni di proporzionalità tra le lunghezze dei lati corrispondenti, e di doppia proporzionalità tra le aree. Alcuni indizi puntano a questa possibilità. Nella risoluzione di questo problema, in particolare, viene esplicitamente utilizzata l'uguaglianza del rapporto tra le lunghezze dei cateti del triangolo esterno e tra le lunghezze dei cateti un triangolo interno (precisamente, quello "superiore"). Altrove si trasforma un rettangolo in un quadrato mediante un'opportuna dilatazione o contrazione di una coppia di lati opposti, che produce lo stesso effetto sull'area.

Gli aggettivi evidenziati nel testo tradotto si riferiscono al disegno ruotato di 90° in senso orario. Sono il retaggio dell'epoca in cui le tavolette, di dimensioni minori, venivano compilate scrivendo dall'alto verso il basso, anziché da sinistra verso destra.

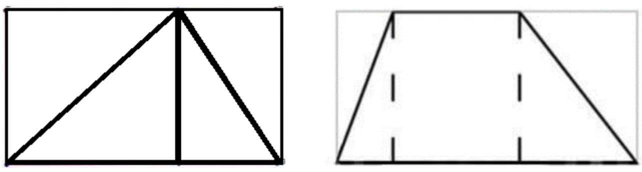
I diagrammi

I più antichi disegni riportati sulle tavolette a contenuto matematico (terzo millennio a.C.) dimostrano una totale incuranza per gli elementi geometrici inessenziali allo svolgimento del problema. Tra questi figurano gli angoli non retti, e le stesse lunghezze, nel momento in cui i loro rapporti non entrino nel ragionamento. Ciò appare evidente, ad esempio, nel documento MIO 1107, dal confronto tra la mappa ivi tracciata e il disegno ricostruito a posteriori con i dati numerici della soluzione:

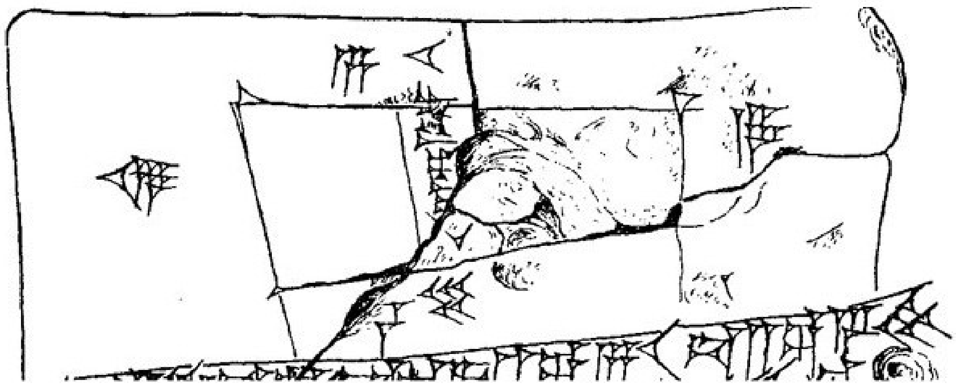




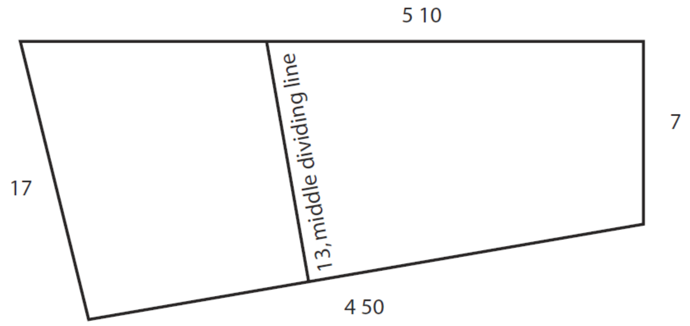
I disegni sembrano concepiti solo come rappresentazioni delle relazioni fondamentali tra i numeri su cui si deve incentrare il procedimento geometrico-aritmetico.
In particolare, il calcolo delle aree dei quadrangoli viene ricondotto alla formula per l'area del rettangolo (o quadrato), procedimento che, nel caso del triangolo o del trapezio, emerge naturalmente da una facile operazione di "taglia e cuci" sulle figure:



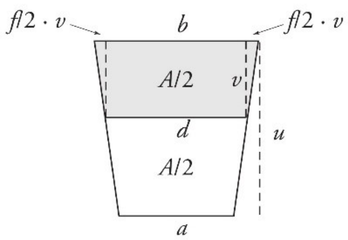
La formula per il calcolo dell'area del trapezio veniva applicata, in via approssimata, anche ai quadrilateri privi di lati paralleli. Un esempio è fornito dal quadrilatero della tavoletta YBC 4675. Il problema chiede di determinare la lunghezza di una linea trasversale che suddivida la figura in due parti di uguale area:



Se la figura, le cui dimensioni sono riprodotte qui sotto, fosse un trapezio avente i lati corti paralleli, il procedimento adottato fornirebbe in maniera esatta la lunghezza di un segmento trasversale, parallelo a questi lati, che suddivide il trapezio nella maniera desiderata.



Lo presentiamo qui nel moderno simbolismo algebrico, in forma generale. Anzitutto introduciamo una costante relativa al trapezio: dette, rispettivamente, a e b le lunghezze della base minore e della base maggiore, e detta u l'altezza, si ponga $f = \frac{b-a}{u}$. Questa costante è detta *indanum* e descrive, di fatto, l'inclinazione dei lati obliqui rispetto alle basi (altrove viene utilizzata per indicare la ripidità di parete). Allora, detta d la lunghezza cercata, se v è l'altezza del trapezio compreso tra la trasversale e la base maggiore, si avrà

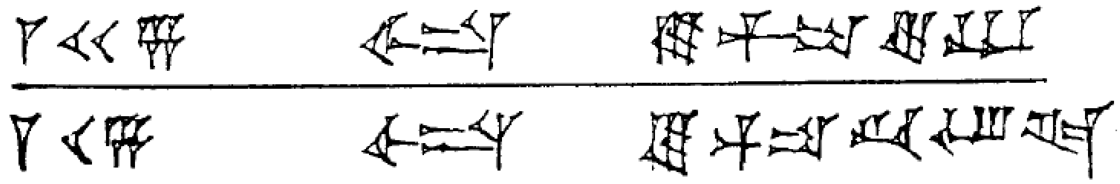


$$\frac{b+d}{2}v = \frac{A}{2}, \quad \text{insieme a} \quad b-d = fv.$$

Se ne deduce $b^2 - d^2 = fA$. Dunque il valore di d si ottiene tramite l'estrazione di una radice quadrata. Si può notare come sia presente la consapevolezza che il valore della costante f non cambia nel passaggio dal trapezio iniziale a quello dimezzato.

Il teorema di Pitagora

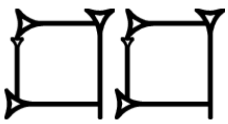
I Babilonesi conoscevano la regola a noi nota sotto il nome di "teorema di Pitagora", come relazione metrica tra le lunghezze dei lati di un triangolo rettangolo. Diversi sono i riferimenti al triangolo di lati 3, 4, 5 (che, ad esempio, nella tavoletta TMS II, viene sottinteso nel secondo rigo del frammento qui sotto):



1 25 IGI.GUB *šà ṣilipta* (BAR-*la*) *ša mitḫartim* (NIGIN)

1 15 IGI.GUB *šà ṣilipta* (BAR-*la*) UŠ(!) *ù* SAG

Il valore di 1;25 (approssimazione di $\sqrt{2}$) è indicato come il coefficiente della diagonale del quadrato:

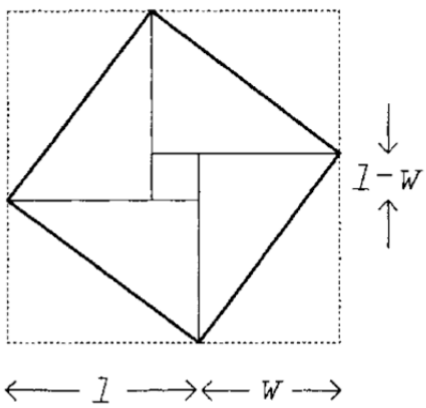


Il valore di 1;15 è invece il coefficiente della diagonale del rettangolo (avente lunghezza 1 e larghezza 0;45).

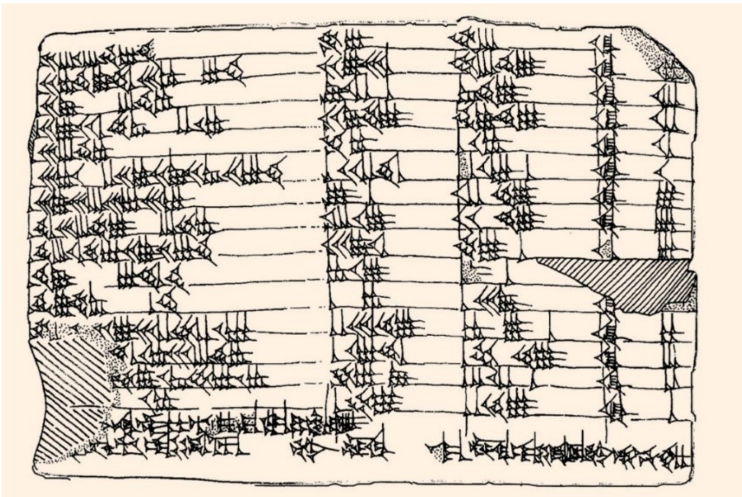
L'identità alla base del Teorema di Pitagora è anche presupposta nel procedimento risolutivo di uno dei problemi della tavoletta Db_2-146, in cui si chiede di determinare la lunghezza ℓ e la larghezza w di un rettangolo essendone state assegnate l'area A e la misura della diagonale d. Nello svolgimento si ricava il quadrato della differenza delle lunghezze dei lati $(\ell - w)$ sottraendo il doppio dell'area A dall'area del quadrato avente lato d:

$$d^2 - 2A = (\ell - w)^2,$$

uguaglianza che equivale a $d^2 = \ell^2 + w^2$. Una possibile illustrazione delle relazioni metriche espresse algebricamente è la seguente:



Una famosa raccolta di terne pitagoriche è la ***tavoletta Plimpton 322***:

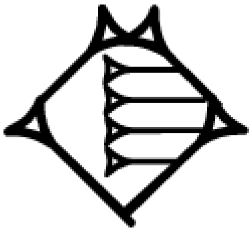


$I' : \delta_n^2$	$II' : b_n$	$III' : d_n$	$IV' : n$
The takiltum of the diagonal from which 1 is subtracted and that of the width comes up	*ib-si of the width*	*ib-si of the diagonal*	*its place*
1.59.00.15	1.59	2.49	*ki* 1
1.56.56.58.14.50.06.15	56.07	1.20.25	*ki* 2
(1.56.56.58.14.56.15)		(3.12.01)	
1.55.07.41.15.33.45	1.16.41	1.50.49	*ki* 3
1.53.10.29.32.52.16	3.31.49	5.09.01	*ki* 4
1.48.54.01.40	1.05	1.37	*ki* 5
1.47.06.41.40	5.19	8.01	*ki* 6
1.43.11.56.28.26.40	38.11	59.01	*ki* 7
1.41.33.45.14.03.45	13.19	20.49	*ki* 8
(1.41.33.59.03.45)			
1.38.33.36.36	8.01	12.49	*ki* 9
	(9.01)		
1.35.10.02.28.27.24.26.40	1.22.41	2.16.01	*ki* 10
1.33.45	45	1.15	*ki* 11
1.29.21.54.02.15	27.59	48.49	*ki* 12
1.27.00.03.45	2.41	4.49	*ki* 13
	(7.12.01)		
1.25.48.51.35.06.40	29.31	53.49	*ki* 14
1.23.13.46.40	28	53	*ki* 15
	(56)		

La seconda e la terza colonna contengono le misure del cateto minore *b* e dell'ipotenusa *d* di triangoli rettangoli, nella prima colonna compare il quadrato del quoziente tra *d* e la misura del cateto maggiore ℓ. Detto δ tale quoziente (*takiltum*), vale l'identità

$$\delta^2 - 1 = \left(\frac{b}{\ell}\right)^2 .$$

Ciò spiega l'intestazione della prima colonna (il cui testo è frutto di una parziale ricostruzione). L'ultima colonna serve per numerare le righe: il numero progressivo è preceduto dal logogramma *KI* (indicante la terra, usato solitamente come determinativo del luogo).



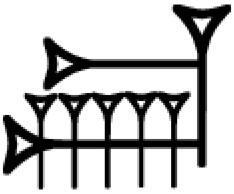
Ecco l'elenco delle terne pitagoriche deducibili dalla tavoletta, ed indicate nella nostra numerazione decimale:

a	*b*	*c*
120	119	169
3456	3367	4825
4800	4601	6649
13500	12709	18541
72	65	97
360	319	481
2700	2291	3541
960	799	1249
600	481	769
6480	4961	8161
60	45	75
2400	1679	2929
240	161	289
2700	1771	3229
90	56	106

Più autori hanno recentemente ipotizzato che l'elenco sia stato ottenuto per via aritmetica. Tuttavia colpisce la constatazione che, nei triangoli rettangoli corrispondenti, l'ampiezza dell'angolo opposto al cateto minore assuma valori decrescenti da circa 45° a circa 30°, separati da circa 1°. Ciò ha indotto alcuni ad attribuire alla tavoletta una natura trigonometrica. Il suo utilizzo resta comunque in parte oscuro.

La più recente ipotesi, formulata nel 2021, vede nella Plimpton 322 una fonte per disegnare triangoli rettangoli (e quindi rettangoli) di varie proporzioni, con la massima precisione possibile. Le terne elencate servirebbero da modelli di riferimento per la misurazione dei terreni: si può immaginare che la lunghezza del cateto maggiore, che viene assunta uguale a 1, dovesse, nelle applicazioni pratiche, fungere da unità a cui rapportare le altre lunghezze. A tal proposito è stato osservato come, nel tempo, in seguito alla diffusione della proprietà privata, siano aumentate le esigenze di accuratezza nella suddivisione dei fondi agricoli, nella determinazione della loro forma e della loro estensione: è quanto risulta da reperti risalenti al secondo millennio, come quello riprodotto qui sotto.

Notiamo che l'individuazione delle aree da misurare è divenuta più articolata, mentre in origine prevaleva la suddivisione in strisce trasversali che venivano trattate, in via approssimata, come rettangoli o trapezi. Di questa pratica è forse rimasta una traccia anche nel carattere cuneiforme indicante il campo ($GANA_2$):

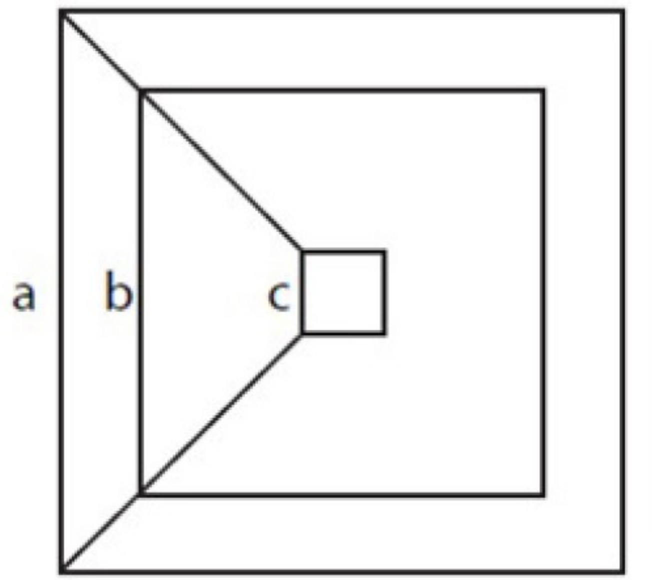


Il fascio di linee parallele potrebbe però anche riferirsi ai solchi di aratura oppure ai canali di irrigazione.

Nota storica Il reperto fu rinvenuto, agli inizi del secolo scorso, da Edgar James Bank nell'Iraq meridionale. Successivamente (nel 1922) fu acquistato dall'editore statunitense George Arthur Plimpton, e, alla morte di quest'ultimo, avvenuta nel 1936, fu ceduto alla Columbia University, presso la cui biblioteca è ancora conservato. Le più recenti datazioni lo collocano intorno al 1800 a.C.

Ancora sulle terne

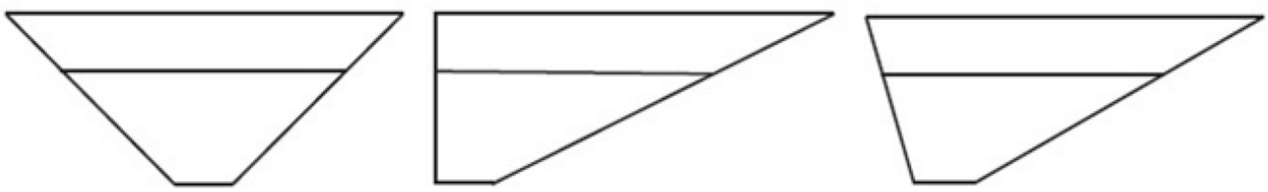
Alcuni problemi geometrici babilonesi riguardano la suddivisione di figure (trapezi, triangoli) in due o più parti di uguale area. L'equipartizione è determinata da segmenti paralleli ad uno dei lati.
Nella bipartizione di un trapezio (isoscele), di basi a e c, sia b la lunghezza del segmento trasversale ad essi parallelo. Era noto che l'uguaglianza tra le aree dei due trapezi di basi a e b, e b e c, rispettivamente, equivale alla condizione che siano uguali le aree comprese, nell'ordine, fra i quadrati di lati a e b e fra i quadrati di lati b e c:



Se ne ricava, dunque, come condizione necessaria e sufficiente, l'uguaglianza $a^2 - b^2 = b^2 - c^2$, ossia

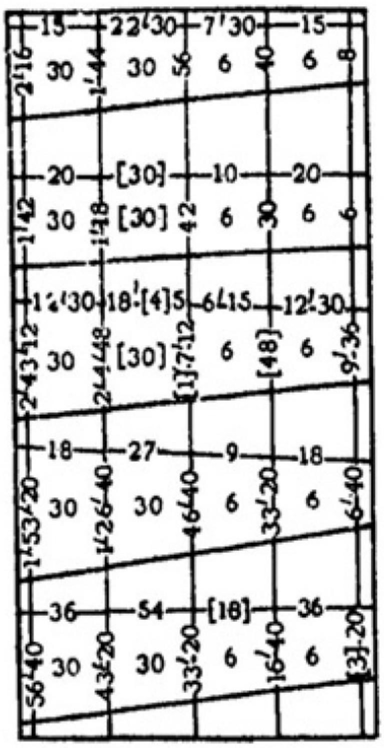
$$2b^2 = a^2 + c^2.$$

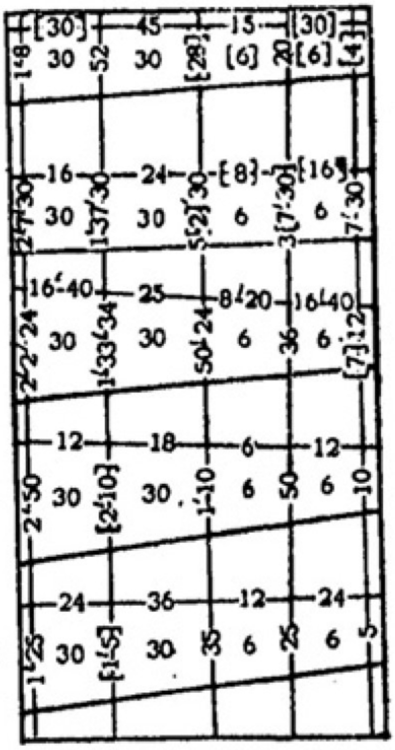
Le considerazioni appena effettuate si estendono ai trapezi qualsiasi, che derivano da quelli isosceli tramite trasformazioni (affini, "tagli") che lasciano invariate le lunghezze delle basi e la loro distanza, e dunque le aree coinvolte:



Diventano dunque interessanti, dal punto di vista pratico, le liste di terne (a, b, c) "trapezoidali" verificanti la precedente identità. Queste sono infatti oggetto di alcune liste, a cui sono dedicate apposite tavole, come la seguente:

Erm 15189





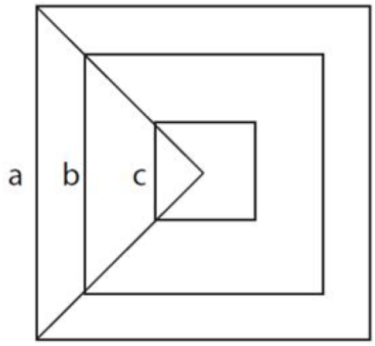
Верхний край

1	1'30	30	1	
17	13	7	1	ú dalmeš

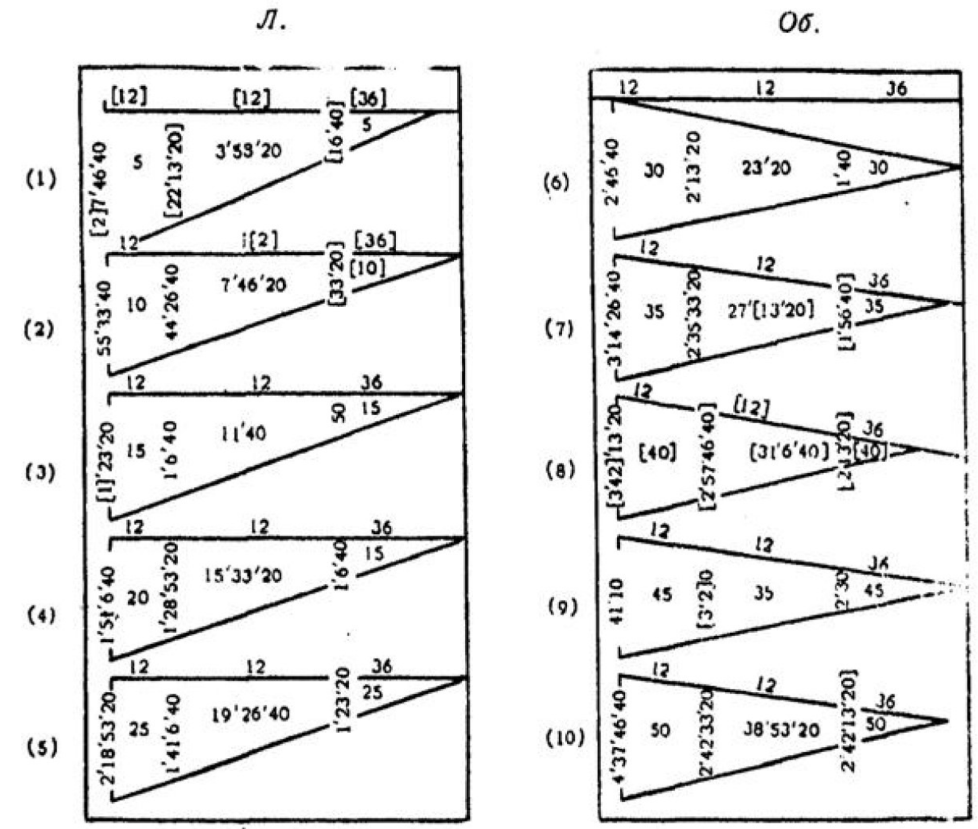
Al rigo (10) possiamo leggere, al centro, le misure delle aree dei trapezi, corrispondenti ai seguenti calcoli:

$$\frac{65+85}{2}\cdot 24 = 30(\cdot 60) \quad \frac{35+65}{2}\cdot 36 = 30(\cdot 60) \quad \frac{25+35}{2}\cdot 12 = 6(\cdot 60) \quad \frac{5+25}{2}\cdot 24 = 6(\cdot 60)$$

Un'applicazione – e forse anche un'origine – analoga hanno le terne pitagoriche, emergenti dal problema dell'individuazione, nel triangolo, di due segmenti trasversali tali da determinare l'uguaglianza fra le aree del trapezio contiguo ad uno dei lati e del triangolo adiacente al vertice opposto:



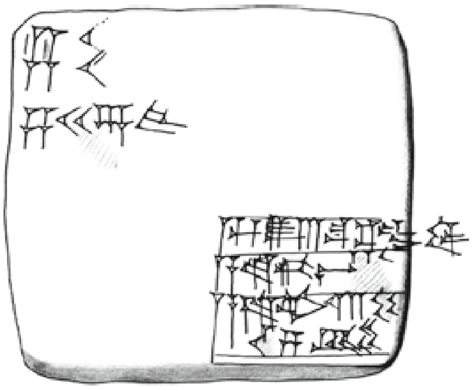
$$c^2 = a^2 - b^2, \text{ ossia } \; a^2 = b^2 + c^2.$$

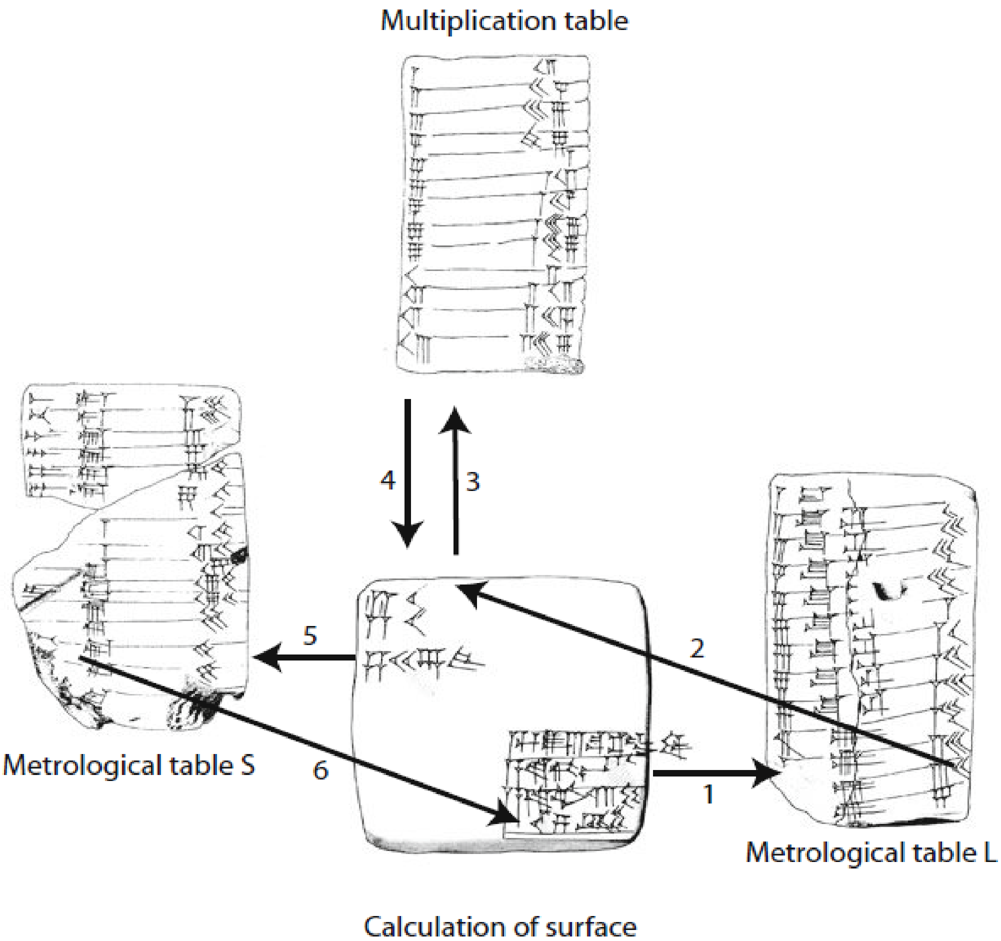


MAH 16055

In questa tavoletta viene affrontato il problema appena descritto, trattando i triangoli come se fossero rettangoli, aventi il lato superiore come ipotenusa.

Numeri e grandezze

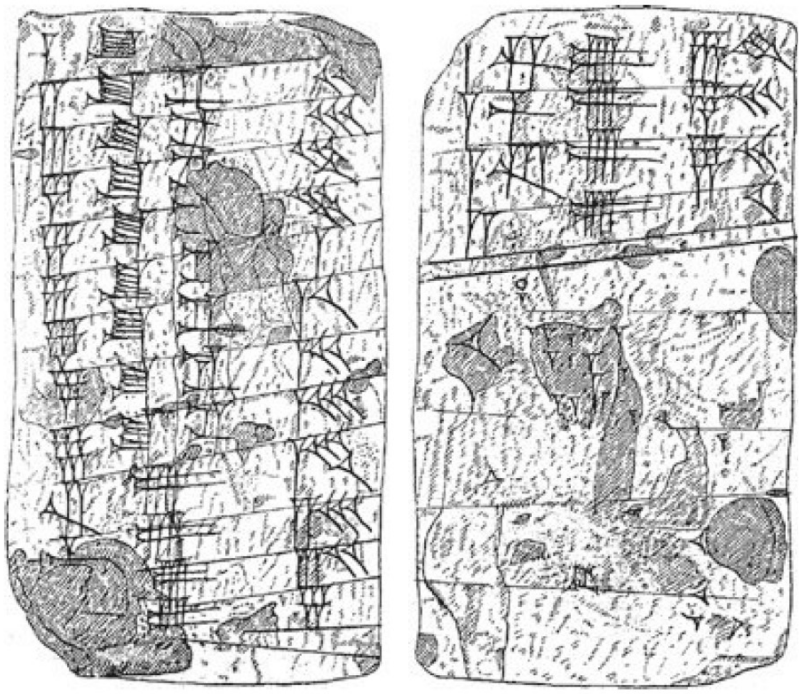
	Translation 2.10 2.10 4. 26[sic].40 1/3 kuš$_3$ 3 šu-si the side (of the square). What is its surface? Its surface is 13 še 1/4[sic] še.



Nella tavoletta scolastica riportata all'inizio della pagina, appaiono nettamente separate le parti dedicate al calcolo aritmetico (in alto a sinistra) e all'applicazione geometrica (in basso a destra). La figura sottostante riproduce i passaggi effettuati nel procedimento risolutivo, che prevedono anche la consultazione di apposite tavole a contenuto numerico, tra cui due tavole metrologiche, per la conversione fra unità di misura delle lunghezze (L) e delle aree (S).

Le tavole di conversione

obverse	
1 šu-si	10
2 šu-si	20
3 šu-si	30
4 šu-si	40
5 šu-si	50
6 šu-si	1
7 šu-si	1.10
8 šu-si	1.20
9 šu-si	1.30
1/3 kuš$_3$	1.40
½ kuš$_3$	2.30
2/3 kuš$_3$	3.20
5/6 kuš$_3$	4.10
1 kuš$_3$	5
reverse	
1 1/3 kuš$_3$	6.40
1 ½ kuš$_3$	7.30
1 2/3 kuš$_3$	8.20
2 kuš$_3$	10



Le misure di lunghezza sono tradotte in numeri astratti, su cui vengono quindi effettuati i calcoli aritmetici. Se un quadrato ha lato pari a 1/3 kuš$_3$ e 3 šu-si, in base alla tabella soprastante gli si associa la somma dei numeri 1,40 e 0,30, ossia 2,10. Questo viene moltiplicato per se stesso, con un metodo analogo alla consueta moltiplicazione in colonna, che utilizza la notazione posizionale in base 60.

$$\begin{array}{rrr}
 & 2, & 10 \\
 & 2, & 10 \\
\hline
 & 21, & 40 \\
4, & 20, & \\
\hline
4, & 41, & 40
\end{array}$$

Si ottiene il numero 4,41,40. A questo punto si utilizza una tavola di conversione per le aree, da cui si ricava la seguente corrispondenza:

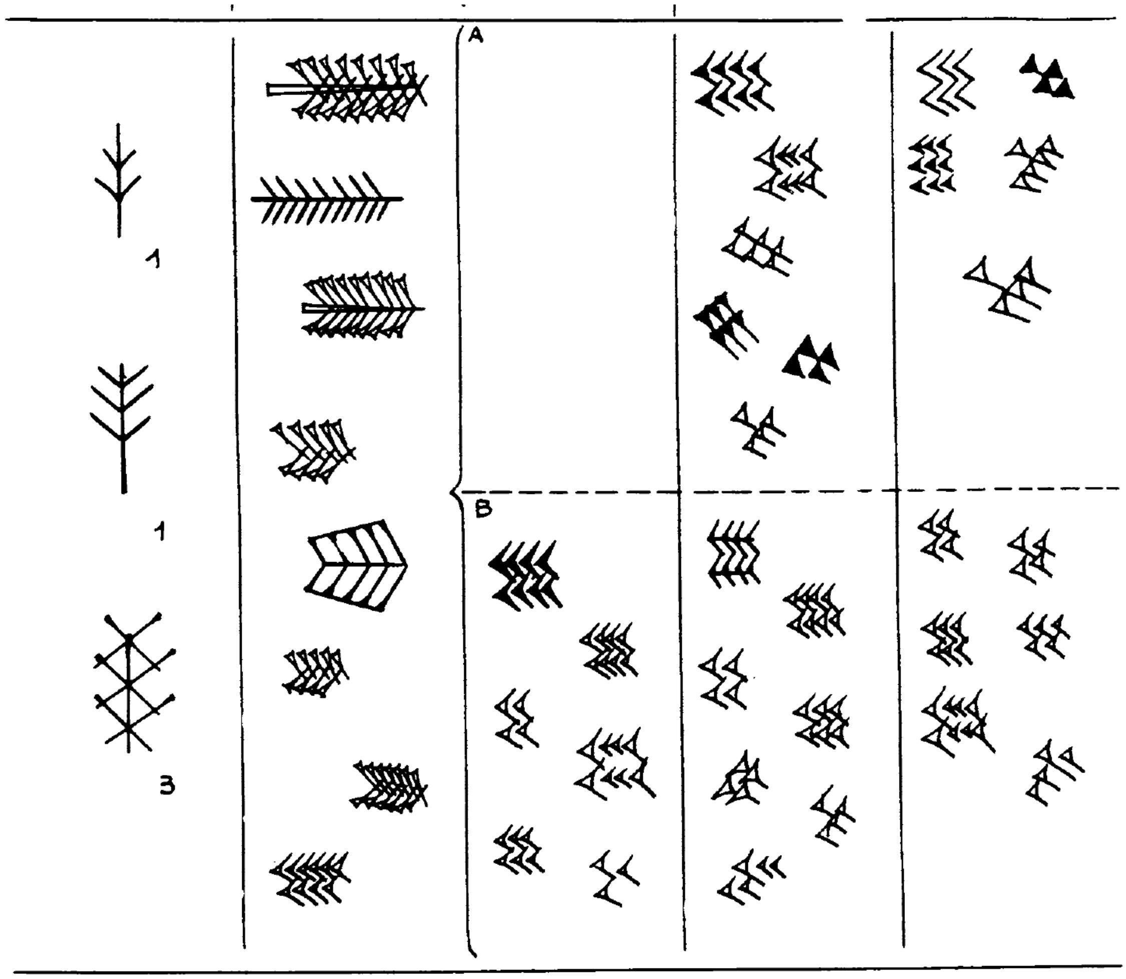
$$4.20 \rightarrow 13 \text{ še}$$

$$6.40 \rightarrow 1/3 \text{ še}$$

Ciò consente di fornire come misura dell’area del quadrato assegnato la somma dei valori a destra.

La misura delle aree (dei campi)

Še (unità di misura)



L’evoluzione del logogramma, dall’originale pittogramma della spiga fino al carattere cuneiforme di epoca babilonese.

In un documento amministrativo di epoca sumera, sul fronte l'indicazione di una quantità di cereale, sul retro la misura di un campo (affiancata dal logogramma $GANA_2$ nella sua forma arcaica).